

Opgaven werkcollege Zwarte Gat

De straal van de waarnemingshorizon van een zwart gat r_s kan berekend worden als:

$$r_s = \frac{2Gm}{c^2},$$

Met G , de gravitatie constante, m de zwart gat massa en c de lichtsnelheid. Deze straal wordt de Schwarzschild radius genoemd, naar haar ontdekker.

1. Bereken de Schwarzschild radius voor een zwart met de massa van de Zon, de Aarde en je eigen massa.

$$r_s(\text{Zon}) = 2.96 \text{ km}, \quad r_s(\text{Aarde}) = 0.9 \text{ cm}$$

2.

(a) Hoe groot moet de kinetische energie (en dus snelheid) zijn op afstand r van een zwart gat tenminste zijn om aan het gat te kunnen ontsnappen volgens de klassieke zwaartekracht theorie?

$$\rightarrow \frac{1}{2} m v^2 = \frac{GMm}{r}$$

(b) Op welke afstand moet de snelheid tenminste de lichtsnelheid zijn? (Waarom is deze berekening niet correct?)

$$\rightarrow r_s = 2 \frac{GM}{c^2} \quad \text{relativiteits theorie van toepassing nabij lichtsnelheid}$$

3.

(a) Bereken de massa dichtheid van een zwart gat binnen de Schwarzschild radius indien de massa hierbinnen uniform verdeeld zou zijn. - $M = \frac{r_s^3 \rho}{2G}, V = \frac{4\pi}{3} r^3$

(b) Voor welke massa (en bijbehorende straal) is de gemiddelde dichtheid gelijk aan water? (Waarom is deze berekening nonsens?)

$$r = 4.0 \times 10^{11} \text{ m} \quad \text{en } M = 2.7 \times 10^{38} \text{ kg}$$

\rightarrow geen evenwicht; massa valt naar centrale punt.

Extra opgave

Actieve sterrenstelsels zenden typisch tussen de 10^{35} en 10^{41} Watt aan licht energie uit. Sterrenkundigen denken dat dit typisch 10% vertegenwoordigt van de opgeslokte massa van het zwarte gat, uitgedrukt in energie. Hint: energie E en massa m zijn in elkaar om te rekenen met de formule $E=mc^2$

4. Bereken hoeveel massa de zwarte gaten in de zwakste en krachtigste actieve sterrenstelsels typisch per jaar opslokken. Druk dit uit in eenheden van een doorsnee sterrenmassa (de Zon).

$$\dot{m} = \frac{10^{35} \text{ Watt}}{c^2} \cdot 3.10^7 \text{ sec} / M_{\odot} \cdot 10 = 1.7 \cdot 10^{-4} / \text{yr} M_{\odot}$$