Uitwerkingen blackbody spectrum - Keuzecollege Sterrenstelsels en zwarte gaten

5 februari 2008

1. Eenheden: $[h] = Js$, $[k] = \frac{J}{K}$, $[\nu] = Hz = \frac{1}{s}$, $[T] = K$, $[c] = \frac{m}{s}$ In de formule wordt dit:

$$[I(\nu)] = \frac{Js(\frac{1}{s})^3}{\frac{m^2}{s^2}} \frac{1}{e^{\frac{Js\frac{1}{s}}{\frac{J}{K}K}} - 1} \frac{1}{s} = \frac{J}{m^2 s}$$

   Dus $I(\nu)$ is in Joule per vierkante meter, per seconde.

   Voor $I(\lambda)$ krijg je hetzelfde: $[\lambda] = m$

$$[I(\lambda)] = \frac{Js(\frac{m}{s})^2}{m^5} \frac{1}{e^{\frac{Js\frac{m}{s}}{m\frac{J}{K}K}} - 1} m = \frac{J}{m^2 s}$$

2. $I(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \delta\nu$ en $\lambda = \frac{c}{\nu}$. Dit geeft: $\mid \frac{\delta\nu}{\delta\lambda} \mid = \frac{c}{\lambda^2}$. Als je dan alles invult krijg je:

$$I(\lambda) = \frac{2hc^2}{\lambda^5} \frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1} \delta\lambda$$

3. Als de temperatuur van de bron hoger wordt dan gebeurt er het volgende in de formule: T wordt groter, daardoor wordt $e^{\frac{h\nu}{kT}}$ kleiner, hierdoor wordt de noemer van de breuk kleiner en het geheel dus groter. Dit betekent dat de energie groter is dan eerst bij dezelfde frequentie. Als de temperatuur lager wordt, gebeurt het tegenovergestelde: de grafiek ligt dan lager.

4. Rayleigh-Jeans limiet:$h\nu \ll kT$ Voor kleine machten is de e-macht te schrijven als $e^{\frac{h\nu}{kT}} = 1 + \frac{h\nu}{kT}$

   Dit geeft:

$$I(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}} - 1} \delta\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2} \frac{1}{1 + \frac{h\nu}{kT} - 1} \delta\nu = \frac{2kT\nu^2}{c^2} \delta\nu$$

5. Wien limiet: $h\nu \gg kT$ Als $\frac{h\nu}{kT}$ erg groot is, is natuurlijk $e^{\frac{h\nu}{kT}}$ ook erg groot en in elk geval veel groter dan 1. Dan mag je $I(\nu)$ dus benaderen als:

$$I(\nu) = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\delta\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}}\delta\nu = \frac{2h\nu^3}{c^2}e^{\frac{-h\nu}{kT}}\delta\nu$$

6. Wien Displacement Law voor ν:

$$\frac{\delta}{\delta\nu}\left(\frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}\right) = 0$$

$$\frac{6h\nu^2}{c^2}\frac{1}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1} + \frac{2h\nu^3}{c^2}\frac{\frac{-h}{kT}e^{\frac{h\nu}{kT}}}{(e^{\frac{h\nu}{kT}}-1)^2} = 0$$

$$3 = \frac{h\nu}{kT}\frac{e^{\frac{h\nu}{kT}}}{e^{\frac{h\nu}{kT}}-1}$$

$$3e^{\frac{h\nu}{kT}} - 3 = \frac{h\nu}{kT}e^{\frac{h\nu}{kT}}$$

$$x = \frac{h\nu}{kT} \Longrightarrow 3e^x - 3 = xe^x \Longrightarrow (3-x)e^x = 3$$

Een numerieke oplossing hiervoor geeft $x = 0$, wat niet voldoet, en $x = 2.821$. Deze laatste waarde geeft de oplossing als x weer wordt omgerekend naar ν: $\nu_{peak} = 5.875 * 10^{10} * T$ in Hz per graad

Wien Displacement Law voor golflengte:

$$\frac{\delta}{\delta\lambda}\left(\frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}}-1}\right) = 0$$

$$\frac{-10hc^2}{\lambda^6}\frac{1}{e^{\frac{hc}{kT\lambda}}-1} + \frac{2hc^2}{\lambda^5}\frac{\frac{hc}{kT\lambda^2}e^{\frac{hc}{kT\lambda}}}{(e^{\frac{hc}{kT\lambda}}-1)^2} = 0$$

$$\frac{hc}{\lambda kT}e^{\frac{hc}{kT\lambda}} = 5(e^{\frac{hc}{kT\lambda}} - 1)$$

$$y = \frac{hc}{\lambda kT} \Longrightarrow ye^y = 5e^y - 5$$

Een numerieke oplossing hiervoor geeft $y = 0$, wat niet voldoet, en $y = 4.965$. Deze laatste waarde geeft de oplossing als y weer wordt omgerekend naar λ: $\lambda_{peak} * T = 2.899 * 10^{-3}$ in meter maal graad

7. De lijn die door de pieken van de grafieken van de energie als functie van de golflengte bij verschillende temperaturen is natuurlijk de Wien displacement law. λ_{peak} is een functie van $\frac{1}{T}$. Bij de grafieken van de energie als functie van de frequentie is de lijn die door de toppen te trekken is natuurlijk ook de Wien Displacement Law. Maar voor de frequentie is ν_{peak} evenredig met T. Dus hoe hoger de temperatuur hoe verder naar *rechts* de piek van de grafiek ligt.

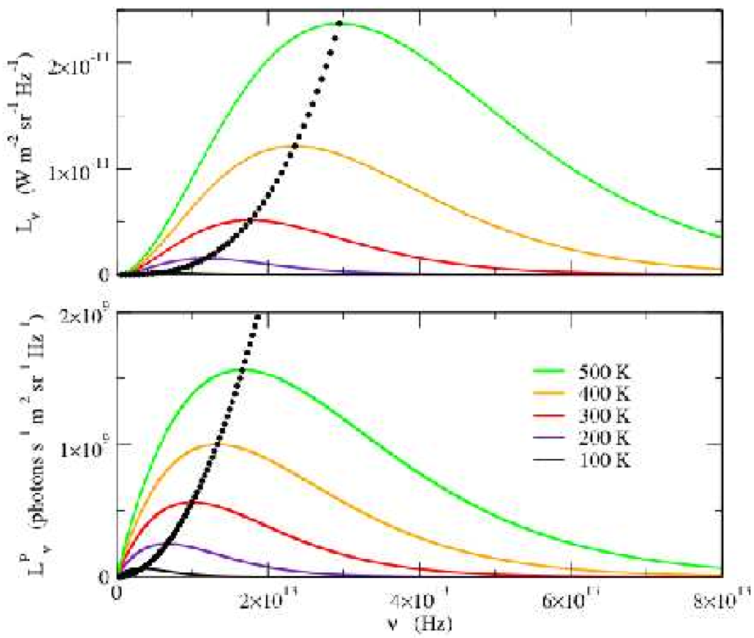

Figure 1: Energie als functie van de frequentie

8. De golflengte geeft ook de kleur aan: hoe kleiner de golflengte hoe blauwer, en hoe hoger de temperatuur hoe meer naar links (dus bij kleinere golflengte) de piek zit. Dus een blauwere ster is heter.

9. Voor de zon: $T = 5578K$ dus $\nu_{peak} = 5.875 * 10^{10} * 5778 = 3.395 * 10^{14} Hz$ en $\lambda_{peak} = \frac{2.899*10^{-3}}{5778} = 5.019 * 10^{-7} m$

   Hiervoor is $I(\nu) = \frac{2h\nu_{peak}^3}{c^2} \frac{1}{e^{\frac{h\nu_{peak}}{kT_{zon}}} - 1} = 1753.35 \frac{J}{m^2 s}$

   De afstand aarde-zon is gemiddeld $R = 149.6 * 10^9 m$, de straal van de zon is $r = 696.0 * 10^6 m$. Verder is $I_{aarde} \frac{4}{3}\pi R^3 = I_{zonoppervlak} \frac{4}{3}\pi r^3$ dus $I_{aarde} = 1.766 \frac{J}{m^2 s}$